On some relations for multiple L-values (Analytic number theory and related topics)

AUTHOR(S):
田中, 立志

CITATION:
田中, 立志. On some relations for multiple L-values (Analytic number theory and related topics). 数理解析研究所講究録 2010, 1710: 192-198

ISSUE DATE:
2010-08

数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 192-198

On some relations for multiple L-values

九州大学大学院数理学研究院　田中 立志
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

rを正の整数, μ_rを1のr乗根全体の集合とする. インデックス$\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_l)\in\mathbb{Z}_{>0}^l$と$\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_l)\in\mu_r^l$ (ただし, $(k_1,s_1)\neq(1,1)$) に対して,

$$L(\mathbf{k};\mathbf{s})=L(k_1,\ldots,k_l;s_1,\ldots,s_l)=\sum_{m_1>\cdots>m_l>0}\frac{s_1^{m_1-m_2}\cdots s_{l-1}^{m_{l-1}-m_l}s_l^{m_l}}{m_1^{k_1}\cdots m_l^{k_l}}$$

で定義される複素数のことを (荒川-金子型あるいはGoncharov型の) **多重L値 (multiple L-value, MLV)** という. 条件$(k_1,s_1)\neq(1,1)$によりこの級数は収束する. $r=1$のときは (Euler-Zagier型の) **多重ゼータ値 (MZV)**, $l=1$のときは**Dirichlet L値**, とくに$r=l=1$のときは**Riemann ゼータ値**とも呼ばれている.

MLV $L(\mathbf{k};\mathbf{s})$は上記の級数表示のほかに, 次のDrinfel'd反復積分表示を持つことが知られている：

$$L(\mathbf{k};\mathbf{s})=\underbrace{\int_0^1\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\int_0^t\frac{s_1dt}{1-s_1t}\cdots\underbrace{\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_l-1}\int_0^t\frac{s_ldt}{1-s_lt}.$$

MZVの研究は, ZagierによりMZVが生成する$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の次元予想 ([17], 1994) が提唱されて以降, 多くの数学者や物理学者らによってなされてきた. とりわけGoncharov [5] や寺杣 [16] により, Zagierの次元予想は少なくともMZVが生成する$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の次元の上限を与えていることが示された. それはすなわちMZVの間には多くの$\mathbb{Q}$上の線形関係式が成り立つことを意味している. そのことを受けて, 関係式を具体的に与える研究も, 今ではすべての文献をここに挙げることが不可能なほど多く存在している. その代表的なものとして, アソシエータ関係式 [4], 一般複シャッフル関係式 [8], 川島の関係式 [10] などがある.

一方, MLVの研究はMZVほどは進展していない. その理由のひとつはMLVが生成する$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の次元予想が, MZVのときのZagierの次元予想のように明示的には知られていないことにあるようである. しかし, 以下に述べるように, Deligne-Goncharov [3], Racinet [13] らによりMLVが生成する$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の次元のとある上限は知られている.

定理 1 (Deligne-Goncharov). 任意の整数 $k \geq 2$ と任意の整数 $r > 0$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k,\\ k_1,\ldots,k_l\geq 1,\\ s_1,\ldots,s_l\in\mu_r,\\ (k_1,s_1)\neq(1,1)}} \mathbb{Q}\cdot L(\mathbf{k};\mathbf{s}) \leq d_k[r].$$

ただし, 数列 $\{d_k[r]\}_{k\geq 0}$ は母関数

$$\sum_{k\geq 0} d_k[r]t^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-t^2-t^3} & r=1,\\ \dfrac{1}{1-t-t^2} & r=2,\\ \dfrac{1}{1-(\frac{\varphi(r)}{2}+\nu)t+(\nu-1)t^2} & r\geq 3 \end{cases}$$

で与えられる. ここに, ν は r を割る有理素数の個数, φ は Euler's totient function である.

Deligne と Goncharov によるこの定理は MLV の間に多くの $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式が成り立っていることを意味している. MLV の間の線形関係式の記述に関する研究はそれほど多くはなされていないようであるが, たとえば荒川-金子 [1] や Goncharov [6] などでなされている. 本稿では, 近年川島学氏との共同研究 [11] で新たに得た一般導分関係式, および川島学氏, 若林徳子氏との共同研究 [12] の結果として巡回和公式と呼び得る関係式族も発見し証明できたので, それらについて, 主に代数的視点から解説する.

2 MLV の代数的定式化

以下では MLV の具体的な関係式について代数的に議論する. まずはじめに, 荒川-金子 [1] により導入された, MLV の代数的定式化について述べる. ([11] も参照されたい.)

$r+1$ 変数非可換多項式環 $\mathcal{A}_r = \mathbb{Q}\langle x, y_s | s\in\mu_r\rangle$ の部分環 $\mathcal{A}_r^1, \mathcal{A}_r^0$ を

$$\mathcal{A}_r \supset \mathcal{A}_r^1 := \mathbb{Q} + \sum_{s\in\mu_r} \mathcal{A}_r y_s \supset \mathcal{A}_r^0 := \mathbb{Q} + \sum_{s\in\mu_r} x\mathcal{A}_r y_s + \sum_{s,t\in\mu_r, t\neq 1} y_t\mathcal{A}_r y_s$$

とおく. $z_{k,s} = x^{k-1}y_s$ $(k\geq 1,\ s\in\mu_r)$ とし, $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{L}\colon \mathcal{A}_r^0 \to \mathbb{C}$ を $\mathcal{L}(1)=1$ および

$$\mathcal{L}(z_{k_1,s_1}\cdots z_{k_l,s_l}) = L(k_1,\ldots,k_l;s_1,\ldots,s_l)$$

で定める. MLV の関係式を記述するということは $\ker\mathcal{L}$ の元を書き下すということにほかならない.

3 代表的な関係式

本節では, MLV の間に成り立つ関係式のうちこれまでに知られているものをまとめる.

3.1 （有限）複シャッフル関係式

$\mathcal{A}_r^1$ 上の積 $*$: $\mathcal{A}_r^1 \times \mathcal{A}_r^1 \to \mathcal{A}_r^1$ を, $\mathbb{Q}$-双線形性および次の 2 条件により定める.

(i) 任意の $w \in \mathcal{A}_r^1$ に対して, $1 * w = w * 1 = w$,

(ii) 任意の $k, l \geq 1$ と任意の語 $w, w' \in \mathcal{A}_r^1$ に対して,
$z_{k,s}w * z_{l,t}w' = z_{k,s}(w * z_{l,t}w') + z_{l,t}(z_{k,s}w * w') + z_{k+l,st}(w * w')$.

この積 $*$ は**調和積（級数シャッフル積）**と呼ばれ, $\mathcal{A}_r^1$ 上で結合的かつ可換な積である. MLV の級数表示からくる '**調和積公式**' は, 写像 $\mathcal{L} \circ \mathcal{I}$ が $*$-準同型である, と言い換えられる. ただし, 写像 $\mathcal{I}$ は $\mathcal{A}_r$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像で,

$$\mathcal{I}(z_{k_1,s_1} \cdots z_{k_l,s_l} x^m) = z_{k_1,s_1} z_{k_2,s_1 s_2} \cdots z_{k_l,s_1 \cdots s_l} x^m$$

（m は正の整数）で与えられる.

また, $\mathcal{A}_r$ 上の積 $\mathrm{ш}$: $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$ を, $\mathbb{Q}$-双線形性および次の 2 条件により定める.

(i) 任意の $w \in \mathcal{A}_r$ に対して, $1 \,\mathrm{ш}\, w = w \,\mathrm{ш}\, 1 = w$,

(ii) 任意の $k, l \geq 1$ と任意の語 $w, w' \in \mathcal{A}_r$ に対して,
$uw \,\mathrm{ш}\, vw' = u(w \,\mathrm{ш}\, vw') + v(uw \,\mathrm{ш}\, w')$.

（ただし, $u, v \in \{x, y_s | s \in \mu_r\}$.）この積 $\mathrm{ш}$ は**シャッフル積（反復積分シャッフル積）**と呼ばれ, $\mathcal{A}_r$ 上で結合的かつ可換な積である. MLV の級数表示からくる '**シャッフル積公式**' は, 写像 $\mathcal{L}$ が $\mathrm{ш}$-準同型である, と言い換えられる.

MLV の（有限）複シャッフル関係式とは, 調和積公式とシャッフル積公式を結びつけた線形関係式のことをいう：

定理 2 (複シャッフル関係式). 任意の $w, w' \in \mathcal{A}_r^0$ に対し,

$$\mathcal{I}(w) \,\mathrm{ш}\, \mathcal{I}(w') - \mathcal{I}(w * w') \in \ker \mathcal{L}$$

が成り立つ.

3.2 正規化された複シャッフル関係式

[8] において証明された MZV の正規化された複シャッフル関係式を MLV の場合に拡張した議論が荒川-金子 [1] においてなされた. 本節では彼らの定理を述べるにとどめる. 証明など, 詳細は論文 [1] を参照されたい.

$\mathcal{A}_{r,\mathrm{ш}}^1$ を $\mathcal{A}_r^1$ の積を $\mathrm{ш}$ と見た可換代数とする. 同型 $\mathcal{A}_{r,\mathrm{ш}}^1 \cong \mathcal{A}_{r,\mathrm{ш}}^0[y_1]$ が知られている. 写像 $\mathrm{reg}_{\mathrm{ш}}: \mathcal{A}_{r,\mathrm{ш}}^1 \to \mathcal{A}_r^0$ を多項式としての定数項を取り出す写像とする. すなわち, $\mathcal{A}_{r,\mathrm{ш}}^1 \ni w = w_0 + w_1 \,\mathrm{ш}\, y_1 + w_2 \,\mathrm{ш}\, y_1^{\mathrm{ш}2} + \cdots + w_d \,\mathrm{ш}\, y_1^{\mathrm{ш}d} \in \mathcal{A}_{r,\mathrm{ш}}^0[y_1]$ であるとき, $\mathrm{reg}_{\mathrm{ш}}(w) = w_0$ とする. このとき, 次が成り立つ.

定理 3 (正規化された複シャッフル関係式). 任意の $w \in \mathcal{A}_r^1, w' \in \mathcal{A}_r^0$ に対し,

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{ш}}(\mathcal{I}(w) \,\mathrm{ш}\, \mathcal{I}(w') - \mathcal{I}(w * w')) \in \ker \mathcal{L}$$

が成り立つ.

3.3 導分関係式

第3.5節で本稿の主題のひとつである導分関係式の一般化について述べるために，ここでは荒川-金子 [1] により証明された MLV の導分関係式について紹介する．

∂ が非可換多項式環 $\mathcal{A}_r$ 上の**導分**であるとは，∂ が $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像であって，ライプニッツ則

$$\partial(ww') = \partial(w)w' + w\partial(w') \quad (w, w' \in \mathcal{A}_r)$$

を満たすもののことをいう．$\mathcal{A}_r$ 上の導分は，$\mathcal{A}_r$ の生成元 x と y_s $(s \in \mu_r)$ の像を与えれば一意的に定まる．今，$n \geq 1$ に対し，$\mathcal{A}_r$ 上の導分 ∂_n を

$$\partial_n(x) = xz^{n-1}y_1,\ \partial_n(y_s) = -xz^{n-1}y_s + y_s z^{n-1}y_1 - y_s z^{n-1}y_s$$

（ただし $z = x + y_1$）で定義する．このとき，MLV の導分関係式は次で与えられる．

定理 4 (導分関係式). 任意の $n \geq 1$ に対して，$\partial_n(\mathcal{A}_r^0) \subset \ker \mathcal{L}$.

3.4 Newton 級数からくる関係式

川島-田中 [11] では，ある '**Newton 級数**' の解析的な議論を用いて MLV のある関係式族を証明した．本節ではその関係式族を紹介する．

写像 M_s $(s \in \mu_r)$ および L_w $(w \in \mathcal{A}_r)$ は $\mathcal{A}_r$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像で，

$$M_s(z_{k_1,s_1} \cdots z_{k_l,s_l}x^m) = z_{k_1,ss_1}z_{k_2,s_2} \cdots z_{k_l,s_l}x^m,$$
$$L_w(w') = ww' \ (w' \in \mathcal{A}_r)$$

（m は正の整数）で定義する．$\mathcal{A}_r$ 上の自己同型 ξ を $\xi(x) = x + y_1$, $\xi(y_s) = \delta(s)y_s - y_1$ で定義する．$\delta(s) = 1$ $(s \neq 1)$, $\delta(1) = 0$ とする．また，$\mathcal{A}_{r,+}^1 = \sum_{s\in\mu_r} \mathcal{A}_r y_s$ とする．$\chi_s = L_{x+\delta(s)y_s}\xi\mathcal{I}M_s$ とおく．このとき，以下が成立する．

定理 5 ([11])**.** $\chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1 * \mathcal{A}_{1,+}^1) \subset \ker \mathcal{L}$.

この MLV の関係式族を用いて次節に述べる一般導分関係式を証明することができる．

3.5 一般導分関係式

MZV の場合に導分 ∂_n の一般化を Connes-Moscovici [2] のホップ代数を参考に金子が [9] で定義し，それが MZV の新たな関係式族（一般導分関係式と呼んでいる）を与えていることが予想された．その予想は [14] にて証明された．本節では，MLV の場合にも同様に，前節で定義した導分 ∂_n の拡張が定式化でき，かつそれが MLV の新たな関係式族を与えていることについて概説する．（詳細は [11] 参照.）

$n \geq 1$, $c \in \mathbb{Q}$ に対して，$\mathbb{Q}$-線形写像 $\partial_n^{(c)} \colon \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$ を

$$\partial_n^{(c)} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}(\theta^{(c)})^{n-1}(\partial_1)$$

で定義する．ここに，$\theta^{(c)} \colon \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$ は

$$\theta^{(c)}(x) = \frac{1}{2}(xz + zx),\ \theta^{(c)}(y_s) = \frac{1}{2}(y_s z + zy_s),$$

(ただし $z = x + y_1$) および

$$\theta^{(c)}(ww') = \theta^{(c)}(w)w' + w\theta^{(c)}(w') + cH(w)\partial_1(w')$$

で定義される $\mathbb{Q}$-線形写像である. H はいわゆるオイラー作用素で, 語 $w \in \mathcal{A}_r$ に対して $H(w) = \deg(w)w$ で定義される $\mathbb{Q}$-線形写像（実は $\mathcal{A}_r$ 上の導分）である. ad は, 交換子として定義されるリー括弧積である: $\mathrm{ad}(\theta)(\partial) = [\theta, \partial] = \theta\partial - \partial\theta$.

$c = 0$ のとき, $\partial_n^{(0)} = \partial_n$ であることが確かめられる. $n = 1$ なら, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して $\partial_1^{(c)} = \partial_1$ である. $c \neq 0$ かつ $n \neq 1$ であれば, $\partial_n^{(c)}$ はもはや $\mathcal{A}_r$ 上の導分ではないが, 次が示せる.

命題 6. (1) （可換性）任意の $n, m \geq 1$, 任意の $c, c' \in \mathbb{Q}$ に対して, $[\partial_n^{(c)}, \partial_m^{(c')}] = 0$.
(2) 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\partial_n^{(c)}(\mathcal{A}_r^0) \subset \mathcal{A}_r^0$.

さらに, 以下の命題も成り立つ. $w \in \mathcal{A}_r^1$ に対し, $\mathcal{H}_w$ を $\mathcal{H}_w(w') = w * w'$ なる $\mathbb{Q}$-線形写像とする.

命題 7. 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, ある $w = w(n,c) \in \mathcal{A}_{1,+}^1$ が存在して, $\mathcal{A}_r^1$ 上で $\partial_n^{(c)}\chi_s = \chi_s\mathcal{H}_w$ が成り立つ. 言い換えれば, 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_r^1 & \xrightarrow{\mathcal{H}_w} & \mathcal{A}_r^1 \\
{\scriptstyle \chi_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_s} \\
\mathcal{A}_r^0 & \xrightarrow[\partial_n^{(c)}]{} & \mathcal{A}_r^0
\end{array}$$

が成立する.

命題7を用いると, 次の MLV の一般導分関係式が証明される.

定理 8 (一般導分関係式). 任意の $n \geq 1$ と任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\partial_n^{(c)}(\mathcal{A}_r^0) \subset \ker \mathcal{L}$.

証明. 命題7より, ある $w \in \mathcal{A}_{1,+}^1$ が存在して $\mathcal{A}_r^1$ 上で $\partial_n^{(c)}\chi_s = \chi_s\mathcal{H}_w$ が成り立つ. $\chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1) = \mathcal{A}_{r,+}^0$ であるから,

$$\partial_n^{(c)}(\mathcal{A}_{r,+}^0) = \partial_n^{(c)}\chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1) = \chi_s\mathcal{H}_w(\mathcal{A}_{r,+}^1) \subset \chi_s(\mathcal{A}_{r,+}^1 * \mathcal{A}_{1,+}^1).$$

定理5より, これは $\ker \mathcal{L}$ に含まれる. □

3.6 巡回和公式

Hoffman-大野 [7] にて証明された MZV の巡回和公式は, 田中-若林 [15] の中で 'ポアソン代数' を参考に代数的に定式化された. 実はこれを MLV へ拡張することができることが最近明らかになったので, 本節でそれを紹介する. (詳細は [12] 参照.)

n を正の整数とする. $\mathcal{A}_r$ の $\mathcal{A}_r^{\otimes(n+1)}$ への作用 $\diamond$ を

$$a \diamond (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1},$$
$$(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) \diamond b = w_1 b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}$$

$(a,b,w_1,\ldots,w_{n+1}\in\mathcal{A}_r)$ で定義する．$\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{C}_n:\mathcal{A}_r\to\mathcal{A}_r^{\otimes(n+1)}$ を

$$\mathcal{C}_n(x)=x\otimes z^{\otimes(n-1)}\otimes y_1,$$
$$\mathcal{C}_n(y_s)=-x\otimes z^{\otimes(n-1)}\otimes y_s+y_s\otimes z^{\otimes(n-1)}\otimes y_1-y_s\otimes z^{\otimes(n-1)}\otimes y_s$$

（ただし $z=x+y_1$）および

$$\mathcal{C}_n(ww')=\mathcal{C}_n(w)\diamond w'+w\diamond\mathcal{C}_n(w')\quad(w,w'\in\mathcal{A}_r)$$

で定義する．$\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{M}_n:\mathcal{A}_r^{\otimes(n+1)}\to\mathcal{A}_r$ を $\mathcal{M}_n(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n+1})=w_1\cdots w_{n+1}$ とし，$\rho_n=\mathcal{M}_n\mathcal{C}_n$ とする．また，$\check{\mathcal{A}}_r^1$ を，語 1 と $z_{k_1,s_1}\cdots z_{k_l,s_l}$（ただし，ある番号 q に対し $k_q>1$，あるいは，ある i,j $(i\neq j)$ に対し $s_i\neq s_j$）で生成される $\mathcal{A}_r^1$ の部分代数とする．このとき，次を得る．

定理 9 (巡回和公式). 任意の整数 $n\geq1$ に対し，$\rho_n(\check{\mathcal{A}}_r^1)\subset\ker\mathcal{L}$.

証明は Hoffman-大野 [7] と同様，ある級数の部分分数展開による．定理 9 において $n=r=1$ の場合が Hoffman-大野による MZV の巡回和公式である．

参考文献

[1] T. Arakawa, M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan 56 (2004), no. 4, 967–991.

[2] A. Connes, H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. 198 (1998), no. 1, 199–246.

[3] P. Deligne, A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 1, 1–56.

[4] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[5] A. Goncharov, *Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties*, European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 361–392, Progr. Math., 201, Birkhäuser, Basel, 2001.

[6] A. Goncharov, *Periods and mixed Tate motives*, preprint, arXiv:math.AG/0202154.

[7] M. Hoffman, Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra 262 (2003), 332–347.

[8] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 307–338.

[9] M. Kaneko, *On an extension of the derivation relation for multiple zeta values*, The Conference on L-Functions, 89–94, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007).

[10] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.

[11] G. Kawashima, T. Tanaka, *Newton series and extended derivation relations for multiple L-values*, preprint, arXiv:math.NT/08013062.

[12] G. Kawashima, T. Tanaka, N. Wakabayashi, *Cyclic sum formula for multiple L-values*, preprint.

[13] G. Racinet, *Doubles melanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unite*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 95 (2002), 185–231.

[14] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 2021–2034.

[15] T. Tanaka, N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra 323 (2010), 766–778.

[16] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149 (2002), no. 2, 339–369.

[17] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.

Tatsushi Tanaka

Faculty of Mathematics
Kyushu University
744 Moto-oka, Nishi-ku, Fukuoka-city
Fukuoka 819-0395 Japan

mailto: t.tanaka@math.kyushu-u.ac.jp